

В. М. Журавлев, А. В. Орищенко,
В. В. Авдонин, С. В. Летуновский

МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЭНЕРГИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ*

Аннотация. Излагается метод моделирования эволюции функции распределения частиц в пространстве скоростей в нестационарной плазме солнечной вспышки на основе точных решений уравнений Фоккера-Планка. Решение строится с учетом влияния кулоновского торможения и взаимодействия частиц плазмы с ионно-звуковой турбулентностью. Математический метод моделирования основан на приведении уравнения Фоккера-Планка путем замены переменных к уравнению типа Шредингера и использовании метода лестничных операторов для его решения.

Ключевые слова: уравнение Фоккера-Планка, диффузия в пространстве скоростей, плазма, солнечная вспышка, ионно-звуковая турбулентность, лестничные операторы.

Abstract. We advise to use the precision result of Fokker-Plank equation for describing evolution of particles distribution function in velocity space. In solution we take into account the effects of coulomb deceleration and interaction of particles of plasma with ion-acoustic turbulence. The mathematic model method is based on transforming Fokker-Plank equation to equation like Shredinger equation using some special substitution for variables in Fokker-Plank equation, and based on use ladder operator method to solve it.

Keywords: Fokker-Plank equation, diffusion in velocity space, plasma, solar flare, ionacoustic turbulence, ladder operators.

Введение

В области вспышки на Солнце реализуются процессы, связанные с формированием различных видов турбулентности в плазме и взаимодействием ионов плазмы как с тем или иным видом этой турбулентности, так и с плазменной средой активной области, где формируются вспышечные условия. Примером подобных процессов может служить взаимодействие ионов с развитой ионно-звуковой турбулентностью на фоне кулоновского трения [1]. Процесс взаимодействия может быть описан уравнением диффузии заряженных частиц в конфигурационном пространстве модулей скорости частиц, а кулоновское трение – результат взаимодействия частиц с фоном зарядов тепловых протонов плазмы.

1 Уравнение для эволюции распределения частиц по скоростям в плазме

Уравнение для эволюции распределения $f(V, t)$ частиц по модулю скоростей V может быть представлено в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[V^2 \left(D \frac{\partial f}{\partial t} + F(V) f \right) \right]. \quad (1)$$

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-97013-р_поволжье_а.

Это уравнение типа уравнения Фокера-Планка. Здесь $F(V)$ – функция, описывающая торможение ионов в плазме за счет кулоновского взаимодействия. Для достаточно малых скоростей $F(V) = -\alpha \cdot V$, где α – постоянная.

2 Решение

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial V^2} (DVf) - \frac{\alpha}{V^2} \frac{\partial (V^3 f)}{\partial V}. \quad (2)$$

Введем функцию $h(V, t) = V \cdot f(V, t)$, имеющую вид (по размерности) плотности числа частиц в обычном пространстве. Тогда уравнение для этой функции можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \frac{\partial^2 h}{\partial V^2} - \alpha V \frac{\partial h}{\partial V} - 2\alpha h. \quad (3)$$

Полученное уравнение решаем методом разделения переменных. Для этого функцию представим в виде произведения – $h(V, t) = \Psi(V) \cdot T(t)$ и подставим в уравнение (3), которое поделим на произведение функций $\Psi(V) \cdot T(t)$. Получим

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Psi} \left\{ D \frac{d^2 \Psi}{dV^2} - \alpha V \frac{d\Psi}{dV} - 2\alpha \Psi \right\}. \quad (4)$$

Левая часть выражения (4) зависит только от времени, а правая – от скорости. Поэтому равенство (4) выполняется, только если обе части выражения равны неопределенной константе, которую обозначим $(-\gamma)$. Тогда (4) распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} \dot{T} + \gamma T = 0, \\ \Psi'' - \frac{\alpha V}{D} \Psi' + \left(\frac{\gamma}{D} - \frac{2\alpha}{D} \right) \Psi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где точкой обозначена операция дифференцирования по времени, а штрихом – по скорости.

Решение первого уравнения системы (5) имеет вид $T(t) = e^{-\gamma t}$, во втором сделаем замену переменной по формуле $u = \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V$. Тогда оно переписывается в виде

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} - 2u \frac{d\Psi}{du} + \left(\frac{2\gamma}{\alpha} - 4 \right) \Psi = 0. \quad (6)$$

Это уравнение Эрмита [2]. Его решением являются нормированные полиномы Эрмита $\Psi(u) = H_n(u)$, а величина в круглых скобках (6) является

собственным значением уравнения (6), для которого выполняется равенство $\frac{2\gamma}{\alpha} - 4 = 2n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, откуда

$$\gamma_n = \alpha (n + 2). \quad (7)$$

То есть частное решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$h_n(V, t) = H_n \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right) \cdot e^{-\alpha (n+2) t},$$

а его общее решение есть линейная комбинация частных решений:

$$h(V, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot H_n \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right) \cdot e^{-\alpha (n+2) t}. \quad (8)$$

Тогда решение уравнения (1) запишется в виде

$$f(V, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \frac{H_n \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} \cdot e^{-\alpha (n+2) t}. \quad (9)$$

Амплитуды A_n находятся из начального и граничных условий. Начальное распределение частиц по скоростям можно считать максвелловским, а в качестве граничных условий выбрать условия вида $\lim_{V \rightarrow \infty} f(V, t) = 0$ и $f(0, t) = 0$. Из последнего равенства следует, что все четные амплитуды $A_{2k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Окончательно для функции f получаем

$$f(V, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cdot \frac{H_{2k+1} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} \cdot e^{-\alpha (2k+3) t}. \quad (10)$$

3 Обсуждение результатов

Вычислим амплитуды A_{2k+1} . Начальное распределение частиц описывается функцией Максвелла [3]:

$$f(V, 0) = \varphi(V) = 4\pi V^2 \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m V^2}{2k_B T}}. \quad (11)$$

Подставляя в (10) значение $t = 0$ и сравнивая с (11), получим

$$f(V, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cdot \frac{H_{2k+1} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} = \varphi(V). \quad (12)$$

Фактически формула (12) есть разложение функции распределения Максвелла по модулю скорости в ряд по полиномам Эрмита. Умножим (12) на $H_{2m+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}}$ и проинтегрируем ее по dV в пределах от $-\infty$ до ∞ , учитывая свойство ортогональности полиномов Эрмита:

$$\begin{aligned} A_{2k+1} \cdot \left\| H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \right\|^2 \sqrt{\frac{2D}{\alpha}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(V) \cdot H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}} dV. \end{aligned} \quad (13)$$

Квадрат нормы полиномов Эрмита $\|H_n\|^2 = 2^n \sqrt{\pi} n!$ [2], поэтому коэффициенты разложения определяются как

$$A_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)! \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(V) \cdot H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}} dV. \quad (14)$$

Обозначим квадратный корень в аргументе функции Эрмита через $\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} = \frac{1}{V_\theta}$. Тогда по смыслу величина $V_\theta = \sqrt{\frac{2D}{\alpha}}$ представляет собой характерную скорость, которую приобретают частицы в рассматриваемом механизме ускорения с учетом кулоновских взаимодействий. Введем также величину $\eta = \frac{mV_\theta^2}{2 k_B T} = \frac{mD}{\alpha k_B T}$, характеризующую относительную энергию частиц плазмы, взаимодействующих с турбулентностью. Выразим через эти величины несколько первых амплитуд разложения (10), рассчитанных по

$$\begin{aligned} \text{формуле (14): } A_1 &= \frac{3\eta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}(\eta+1)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{12} \frac{\eta-2}{\eta+2}, \quad \frac{A_5}{A_3} = \frac{\eta(3\eta-4)}{8(\eta+1)(3\eta-2)}, \\ \frac{A_7}{A_5} &= \frac{\eta(\eta-2)}{4(\eta+1)(3\eta-4)} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Видно, что амплитуды A_{2k+1} , вычисленные при различных значениях k , убывают по модулю с ростом k . При $t=0$ ряд (10) с коэффициентами (14) сходится к распределению Максвелла. С течением времени множитель, стоящий перед функцией Эрмита, будет уменьшаться по экспоненте, и, следовательно, полученное решение нашего уравнения в виде ряда также останется сходящимся.

4 Дополнение. Квантовая аналогия

Если разделить переменных в уравнении (3) производить по формуле $h = T(t) \cdot \Omega(V) e^{\alpha V^2/4D}$, то функция $\Omega(V)$ будет удовлетворять уравнению,

вид которого формально аналогичен виду уравнения на собственные значения квантового гармонического осциллятора [3] за тем исключением, что штрихи в этих уравнениях имеют совершенно различный смысл:

$$\Omega'' - \frac{\alpha^2}{4D^2} V^2 \Omega = \left(-\frac{\gamma}{D} + \frac{3\alpha}{2D} \right) \Omega. \quad (15)$$

В формуле (15) штрихи обозначают производные по модулю скорости в конфигурационном пространстве, а в уравнении Шредингера – это производные по пространственной координате в обычном пространстве.

Для того чтобы уравнение (15) в точности формально перешло по виду в уравнение Шредингера для квантового гармонического осциллятора, достаточно формально положить $D \Rightarrow \hbar / \sqrt{2m}$, $\alpha^2 \Rightarrow 2\omega^2 m$, $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \Rightarrow \frac{D(2\gamma - 3\alpha)}{2}$, «забыв» о различии смысла штрихов. В таком случае мы также приходим к полученному условию квантования (7).

Список литературы

1. **Орищенко, А. В.** Формирование солнечных космических лучей, обогащенных тяжелыми ионами / А. В. Орищенко // Космос: наука и образование – 2005 : тезисы докладов школы-семинара. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2005. – С. 26–29.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган ; пер. с англ. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
3. **Пул, Ч.** Справочное руководство по физике. Фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы : пер. с англ. / Ч. Пул. – М. : Мир, 2001. – 462 с.

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра теоретической
физики, Ульяновский
государственный университет

Zhuravlev Viktor Mikhailovich

Doctor of Science (in Physics), professor,
sub-department of theoretical physics,
Ulyanovsk State University

Орищенко Алексей Васильевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра физики,
Ульяновский государственный
университет (филиал в г. Димитровград)

Orishchenko Alexey Vasilyevich

PhD in Physics, associate professor,
sub-department of physics,
Ulyanovsk State University
(Dimitrovgrad sub-department)

Летуновский Сергей Владимирович

аспирант,
Ульяновский государственный
университет (филиал в г. Димитровград)

Letunovskiy Sergey Vladimirovich

post-graduate student,
Ulyanovsk State University
(Dimitrovgrad sub-department)

Авдонин Василий Вячеславович

младший научный сотрудник,
ОАО Государственный научный центр
Научно-исследовательский институт
атомных реакторов (г. Димитровград)

Avdonin Vasily Vyacheslavovich

junior scientific researcher,
Joint Stock Company "State Scientific
Center Research Institute of Atomic
Reactors" (Dimitrovgrad)

УДК 533.933; 533.932

Журавлев, В. М.

Модели эволюции распределения частиц по энергии в пространстве скоростей / В. М. Журавлев, А. В. Орищенко, В. В. Авдонин, С. В. Летунковский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 121–126.